Linköpings tekniska högskola
ITN/Campus Norrköping

TENTAMEN

TNG 019 Optimeringslära

Datum:	2001-08-25
Tid:	08 - 12
Hjälpmedel:	Kompendium i optimeringslära: 1999-10-18 (ev. kompletterat med Lagrangedualitet) eller oktober 2000.
Antal uppgifter:	5

Examinator:	Peter Värbrand
Jourhavande lärare:	Peter Värbrand, mobil 0708-423131

Tentamensinstruktioner
När Du löser räkneuppgifter *Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.* *Motivera alla påståenden Du gör.* *Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.* *Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.* **Vid skrivningstidens slut** *Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.* *Markera på omslaget vilka uppgifter Du behandlat.* *Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.*

Lycka till!

1. Betrakta följande LP-problem

$$
\begin{array}{rrcrcrcr}
\min & z = 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & \\
\text{då} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \\
 & & & x_2 & - & x_3 & \geq & 1 \\
 & & & \multicolumn{3}{c}{x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0} & &
\end{array}
$$

- Formulera det duala problemet (1 poäng).
- Tag fram två tillåtna duala extrempunkter (på enklast möjliga sätt, t ex grafiskt) och beräkna motsvarande duala målfunktionsvärden (1 poäng).
- Kan ovanstående duala målfunktionsvärden utnyttjas för att uppskatta värdet på det primala problemets optimala målfunktionsvärde, dvs z^*? I så fall hur (1 poäng)?

2. Givet följande problem

$$
\begin{array}{rl}
\max & f(x_1, x_2) = x_1 - x_1^2 + x_1 x_2 - 2x_2^2 \\
\text{då} & 2x_1 - x_2^2 \geq 1
\end{array}
$$

- Avgör om punkten $(x_1, x_2) = (\frac{4}{7}, \frac{1}{7})$ uppfyller optimalitetsvillkoren (KKT-villkoren) (1 poäng).
- Är problemet konvext (1 poäng)?
- Kan man dra någon slutsats baserat på ovanstående resultat (1 poäng)?

3. Antag att vi börjar lösa LP-problemet

$$
\begin{array}{rrcrcrcr}
\max & z = 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \\
 & -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq & 2 \\
 & \multicolumn{5}{c}{x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0} & &
\end{array}
$$

med simplexmetoden och att vi i fas 2 så småningom erhåller följande tablå (s_1 och s_2 är slackvariabler i respektive bivillkor ovan):

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	$\bar{\mathbf{b}}$
z	1	-1				1	-2
s_1		2	2		1	1	8
x_3		-1	-1	1		-1	2

- Är lösningen ovan optimal? Om inte, utför resterande beräkningar. Ange optimallösningen (2 poäng).
- Är optimallösningen till problemet unik? Motivera! (1 poäng)

4. Ett aluminiumföretag kan tillverka tre olika kvaliteer (hög, medel, låg) vid fyra olika anläggningar, A, B, C och D. Tillverkningskapaciteten (per dag) vid de olika anläggningarna varierar enligt nedanstående tabell:

	Anläggning			
Aluminiumkvalitet	A	B	C	D
hög	6	2	3	4
medel	2	2	5	4
låg	4	10	6	4

Företaget har lovat att tillverka och distribuera 12 ton hög-aluminium, 8 ton medel-aluminium och 5 ton låg-aluminium. Anläggning A kostar 50 000 kr per dag i drift, motsvarande för anläggning B, C och D är 60 000, 70 000 respektive 55 000. Hur många dagar ska tillverkning äga rum vid respektive anläggning, då målet är att tillverka ovanstående volymer till minsta kostnad?

- Formulera ovanstående problem som ett LP-problem (1.5 poäng).
- Hur kan modellen modifieras om tillverkning får ske vid *högst* två anläggningar (1.5 poäng)?

5. Papper kan produceras från antingen nytillverkad pappersmassa (massa), returpapper från högkvalitativt papper (retur 1) samt returpapper från tidningspapper (retur 2). Massa kostar 800 kr/ton, retur 1 och retur 2 kostar 400 respektive 150 kr/ton. Det finns fyra olika processer som kan användas vid tillverkningen. Att producera 1 ton papper kräver i respektive process råvara (i ton) enligt följande tabell:

Process	massa	retur 1	retur 2
1	3		
2	1	4	
3	1		12
4		8	

Tillgången på massa är begränsad till 80 ton och uppgiften är att bestämma optimal tillverkningsstrategi då målet är att tillverka 100 ton papper till minimal kostnad. Problemet har lösts med MPL/CPLEX och indata- och utdatafil listas nedan. Utnyttja denna information och svara på följande frågor.

- Hur påverkas den optimala tillverkningskostnaden om priset på retur 1 ökar med 40 kr/ton (1 poäng)?
- Hur påverkas den optimala tillverkningskostnaden om man enbart behöver tillverka 85 ton papper (1 poäng)?
- Hur påverkas den optimala tillverkningskostnaden om om man får tillgång till ytterligare ett ton massa (1 poäng)?

INDATAFIL:

```
TITLE Papper;
DECISION
     p1  ! ( = antal ton papper som tillverkas med process 1 )
     p2  ! ( =              -  "  -                        2 )
     p3  ! ( =              -  "  -                        3 )
     p4  ! ( =              -  "  -                        4 )

MIN
    Kostnad = 800 (3 p1 + p2 + p3) + 400 ( 4 p2 + 8 p4) + 150 (12 p3) ;

SUBJECT TO
    Efterfragan: p1 + p2 + p3 + p4 = 100 ;
    maxmassa   : 3 p1 + p2 + p3 < 80 ;
END
```

UTDATAFIL:

```
   MPL Modeling System   -   Copyright (c) 1988-1998, Maximal Software, Inc.
--------------------------------------------------------------------------------

SOLUTION RESULT
  Optimal solution found
    MIN Kostnad  =     256000.0000

DECISION VARIABLES
    Variable Name            Activity     Reduced Cost
  ------------------------------------------------------
    p1                         0.0000       1600.0000
    p2                        80.0000          0.0000
    p3                         0.0000        200.0000
    p4                        20.0000          0.0000
  ------------------------------------------------------

CONSTRAINTS
    Constraint Name             Slack     Shadow Price
  ------------------------------------------------------
    Efterfragan                0.0000      -3200.0000
    maxmassa                   0.0000        800.0000
  ------------------------------------------------------

RANGES OBJECTIVE
    Variable Name         Coefficient      Lower Bound      Upper Bound
  -----------------------------------------------------------------------
    p1                      2400.0000         800.0000           1E+020
    p2                      2400.0000          -1E+020        2600.0000
    p3                      2600.0000        2400.0000           1E+020
    p4                      3200.0000        2400.0000           1E+020
  -----------------------------------------------------------------------

RANGES RHS
    Constraint Name         RHS Value      Lower Bound      Upper Bound
  -----------------------------------------------------------------------
    Efterfragan              100.0000          80.0000           1E+020
    maxmassa                  80.0000           0.0000         100.0000
  -----------------------------------------------------------------------
END
```