Linköpings tekniska högskola
ITN/Campus Norrköping

TENTAMEN

TNG 019 Optimeringslära

Datum:	2002-08-31
Tid:	08 - 12
Hjälpmedel:	Kursbok, Linjär och ickelinjär optimering, Studentlitteratur 2001, <u>eller</u> Kompendium i optimeringslära, oktober 2000. (Böckerna får innehålla egna kommentarer.) Miniräknare
Antal uppgifter:	5
Examinator:	Peter Värbrand
Jourhavande lärare:	Peter Värbrand, Tel 0708-423131 Tobias Andersson, Tel 0730-969336

Tentamensinstruktioner
<u>När Du löser räkneuppgifter</u> *Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.* *Motivera alla påståenden Du gör.* *Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.* *Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.* **<u>Vid skrivningstidens slut</u>** *Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.* *Markera på omslaget vilka uppgifter Du behandlat.* *Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.*

Lycka till!

1. Optimeringsgruppen vid ITN ska köpa in nya programvaror för undervisnings- och forskningsändamål. En utförd inventering visar att det finns 6 olika program på marknaden. Ett krav på inköpet är att de inköpta datorprogrammen tillsammans ska kunna lösa linjärprogrammeringsproblem (LP), icke-linjära problem (ILP), heltalsproblem (HP) samt flermålsproblem (FP). De olika datorprogrammen klarar dessa problemklasser enligt följande:

	Datorprogram					
Problemklass	1	2	3	4	5	6
LP	x	x	x	x	x	x
ILP				x	x	x
HP			x			x
FP		x			x	
Kostnad (kkr)	30	80	60	90	120	130

a) Formulera en optimeringsmodell som avgör vilket/vilka datorprogram som ska inköpas om målet är att minimera inköpskostnaden. (2p)

b) Programvarorna (1,2,3) har samma leverantör, och som erbjuder en rabatt på 25 kkr om man köper minst 2 programvaror. Modifiera modellen i a) så att den även tar hänsyn till detta. (1p)

2. Betrakta följande LP-problem

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\min & z = & 2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & & & \\
 & \text{då} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 10 & \quad (1) \\
 & & & - & x_2 & + & x_3 & \geq & 1 & \quad (2) \\
 & & x_1 & & & - & x_3 & \leq & 1 & \quad (3) \\
 & & \multicolumn{5}{l}{x_1,\ x_2,\ x_3\ \geq 0} & & &
\end{array}
$$

a) Är lösningen $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3) = (3, 1, 2, 1, 0, 0)$, där s_1, s_2, s_3 är slackvariabler till respektive bivillkor ovan, en *tillåten baslösning* till LP-problemet? (1p)

b) Avgör med hjälp av dualitet och komplementaritet, om punkten $(x_1, x_2, x_3) = (0, 4, 6)$ är en optimallösning till det givna problemet ovan. (2p)

3. Teckna optimalitetsvillkoren till nedanstående problem och avgör om punkten $(x_1, x_2) = (2, 8)$ är en optimallösning.

$$
\begin{array}{rl}
\max f(x_1, x_2) = & -x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 + 4x_1 \\
\text{då} & x_1^2 \leq 4 \\
 & -x_1 + x_2 \geq 4
\end{array}
$$

4. Givet funktionen

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$$

a) Avgör om riktningen $\mathbf{d} = (2\ 1\ 1)^T$ är en ascentriktning till funktionen i punkten $(x_1, x_2, x_3) = (-2, 1, 1)$.

b) Finn om möjligt (valfri metod) en descentriktning till funktionen i punkten $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$.

c) Gradienten till funktionen i punkten (0,0,0) är $\nabla f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$. Kan man utifrån detta resultat, tillsammans med resultatet från deluppgift b), avgöra huruvida funktionen ovan är konvex?

5. Företaget Pulp AB tillverkar papper från antingen nytillverkad pappersmassa (massa), returpapper från högkvalitativt papper (retur 1) samt returpapper från tidningspapper (retur 2). Massa kostar 800 kr/ton, retur 1 och retur 2 kostar 400 respektive 150 kr/ton. Det finns fyra olika processer som kan användas vid tillverkningen. Att producera 1 ton papper kräver i respektive process råvara (i ton) enligt följande tabell:

Process	massa	retur 1	retur 2
1	3		
2	1	4	
3	1		12
4		8	

Tillgången på massa är begränsad till 80 ton. Uppgiften är att bestämma optimal tillverkningsstrategi då målet är att tillverka 100 ton papper till minimal kostnad. Problemet kan formuleras enligt

Variabeldeklaration:

$$x_j = \text{Antal ton papper som tillverkas med process } j, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Modell:

$$\begin{aligned} \min z = \; & 800(3x_1 + x_2 + x_3) + 400(4x_2 + 8x_4) + 150(12x_3) \\ \text{då} \; & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 80 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Utnyttja indata- och utdatafilerna (från AMPL/CPLEX, listas sist i uppgiften) och svara på nedanstående frågor. Motivera noga!

a) Process 1 och 3 utnyttjas inte i optimallösningen. Antag att man var tvungen att flytta viss produktion till någon av dessa processer, vilken är *förmodligen* den mest lönsamma att utnyttja - och varför?

b) Hur förändras den optimala kostnaden om man istället tillverkar 85 ton massa?

c) Hur påverkas den optimala lösningen om priset på retur 2 minskar med 15 kr?

INDATAFIL:

```
TITLE Pulp;
DECISION
x1 ! ( = antal ton papper som tillverkas med process 1 )
x2 ! ( = antal ton papper som tillverkas med process 2 )
x3 ! ( = antal ton papper som tillverkas med process 3 )
x4 ! ( = antal ton papper som tillverkas med process 4 )

MIN
    Kostnad = 2400 x1 + 2400 x2 + 2600 x3 + 3200 x4;

SUBJECT TO
    Produktion: x1 + x2 + x3 + x4 = 100 ;
    Tillgång:  3x1 + x2 + x3      <  80 ;
END
```

UTDATAFIL:

```
--------------------------------------------------------------------------------
SOLUTION RESULT - Optimal solution found
    MIN Kostnad  =     256000.0000

DECISION VARIABLES
    Variable Name            Activity     Reduced Cost
  ------------------------------------------------------
    x1                         0.0000       1600.0000
    x2                        80.0000          0.0000
    x3                         0.0000        200.0000
    x4                        20.0000          0.0000
  ------------------------------------------------------

CONSTRAINTS
    Constraint Name             Slack     Shadow Price
  ------------------------------------------------------
    Produktion                   0.0000      -3200.0000
    Begränsning                  0.0000        800.0000
  ------------------------------------------------------

RANGES OBJECTIVE
    Variable Name         Coefficient      Lower Bound      Upper Bound
  -----------------------------------------------------------------------
    x1                      2400.0000         800.0000          1E+020
    x2                      2400.0000          -1E+020       2600.0000
    x3                      2600.0000        2400.0000          1E+020
    x4                      3200.0000        2400.0000          1E+020
  -----------------------------------------------------------------------

RANGES RHS
    Constraint Name         RHS Value      Lower Bound      Upper Bound
  -----------------------------------------------------------------------
    Produktion               100.0000          80.0000          1E+020
    Begränsning               80.0000           0.0000        100.0000
  -----------------------------------------------------------------------
END
```