Linköpings tekniska högskola
ITN/Campus Norrköping

TENTAMEN

TNG 019 Optimeringslära

Datum:	2002-12-17
Tid:	08 - 12
Hjälpmedel:	Kursbok, Linjär och ickelinjär optimering, Studentlitteratur 2001, eller Kompendium i optimeringslära, oktober 2000. (Böckerna får innehålla egna kommentarer.)
Antal uppgifter:	5
Examinator:	Peter Värbrand
Jourhavande lärare:	Peter Värbrand, Tel 0708-423131 Anders Peterson, Tel 011-363107

Tentamensinstruktioner

När Du löser räkneuppgifter

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.

Vid skrivningstidens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Lycka till!

1. Antag att vi håller på att lösa LP-problemet

$$
\text{(P)} \qquad \begin{array}{rrcrcrcl}
\min \; z = & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & \\
\text{då} \; & 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 4 \\
 & \multicolumn{5}{c}{x_1,\; x_2,\; x_3 \geq 0} & &
\end{array}
$$

med simplexmetoden och att vi under fas 2 erhåller följande tablå (s_1 och s_2 är slackvariabler i respektive bivillkor ovan):

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	$\bar{\mathbf{b}}$
z	1	$-3/2$	$-5/2$			$1/2$	-2
x_3		$1/2$	$1/2$	1		$-1/2$	2
s_1		$3/2$	$7/2$		1	$1/2$	8

a) Utför **en** iteration utifrån baslösningen/tablån ovan. Ange den nya baslösningen samt avgör om den är optimal? (1p)

b) Beskriv iterationen i a) enligt sökmetodkonceptet, dvs $x^{(k+1)} = x^{(k)} + t^{(k)}d^{(k)}$, där $x^{(k)}$ är den givna lösningen ovan, $x^{(k+1)}$ den nya lösningen från deluppgift a), $d^{(k)}$ sökriktningen och $t^{(k)}$ steglängden. (1p)

c) Ta fram en tillåten duallösning med utgångspunkt från (P) ovan och verifiera svag dualitet. (1p)

2. Låt $f(x_1, x_2)$ vara en konvex funktion och betrakta problemet:

$$
\begin{array}{ll}
\min & f(x_1, x_2) \\
\text{då} & Ax \leq b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

I figuren (se nästa sida) är $f(x_1, x_2)$ illustrerad med hjälp av nivåkurvor och de linjära bivillkoren har ritats in med tjocka linjer. Antag att vi angriper problemet med Frank-Wolfe-metoden och startar i den tillåtna punkten $x^{(0)}$, som markerats med ett kryss i figuren.

a) Rita in tangenten till $f(x_1, x_2)$ i punkten $x^{(0)}$ och använd denna för att tydligt markera sökriktningen i den första iterationen. (1p)

b) Lös LP-problemet grafiskt och markera lösningen $y^{(0)}$ i figuren. Utför vidare en linjesökning med hjälp av figuren och markera den nya punkten $x^{(1)}$. (1p)

c) Beskriv med ord hur man med hjälp av en graderad linjal kan bestämma steglängden ur figuren. (1p)

Obs! På sista sidan i tentamen finns ett extrablad med figuren utritad. Använd denna sida vid lösningen och lämna in den tillsammans med övriga sidor.

3. Doft AB tillverkar ett bassortiment bestående av två olika typer parfym, Bella och Bene. Vid tillverkningen används ett råmaterial som kan köpas in för 60 kr/kg. Om man kör tillverkningsprocessen i 1 timma så ”omvandlas” 1 kg råmaterial till 200 ml Bella och 250 ml Bene. Dessa båda parfymer kan därefter säljas till priset 3 kr/ml respektive 2 kr/ml.

   Doft AB har också möjligheten att fortsätta förädlingen och vidareutveckla produkterna till mer exklusiva parfymer, Bellalyx respektive Benelyx. I detta steg kan 1 ml Bella förädlas till 1 ml Bellalyx, vilket tar 6 minuter processtid och kostar 1 kr. På motsvarande sätt kan 1 ml Bene förädlas till 1 ml Benelyx, vilket tar 4 minuter och kostar 0,80 kr. De förädlade parfymerna kan nu säljas för 6 kr/ml respektive 5 kr/ml.

   Under planeringsperioden har Doft AB tillgång till 6000 timmar processtid samt har möjlighet att köpa in 2000 kg råmaterial. Formulera ett LP-problem som hjälper Doft AB att få så stor lönsamhet som möjligt i tillverkningen. Problemet skall ej lösas!

4. Betrakta problemet

$$\min f(x_1, x_2) = c_1 x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 + c_2 x_2$$

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{då} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

   a) Illustrera geometriskt (rita) Karush-Kuhn-Tucker (KKT) villkoren i punkten $(x_1, x_2) = (-2, 0)$. (1p)

   b) Ange kraven på och relationen mellan c_1 och c_2 för att punkten i a) ska vara globalt minimum. (2p)

5. Ett aluminiumföretag kan tillverka tre olika kvaliteer (hög, medel, låg) vid fyra olika anläggningar, A, B, C och D. Tillverkningskapaciteten (per dag) vid de olika anläggningarna varierar enligt nedanstående tabell:

	Anläggning			
Aluminiumkvalitet	A	B	C	D
hög	6	2	3	4
medel	2	2	5	4
låg	4	10	6	4

   Företaget har lovat att tillverka och distribuera 12 ton hög-aluminium, 8 ton medel-aluminium och 5 ton låg-aluminium. Anläggning A kostar 50 000 kr per dag i drift, motsvarande för anläggning B, C och D är 60 000, 70 000 respektive 55 000. Uppgiften är att avgöra hur många dagar som tillverkning skall äga rum vid respektive anläggning, då målet är att tillverka ovanstående volymer till minsta kostnad?

   Om problemet formuleras som ett LP-problem ger det upphov till nedanstående indata- och utdatafiler. Utnyttja denna information och svara på nedanstående frågor:

   a) Ingen tillverkning sker vid anläggning C. Vid vilken dagskostnad skulle detta vara intressant?

   b) Hur påverkas det optimala målfunktionsvärdet om dagskostnaden vid anläggning D drastiskt skulle minska till 30000 kr/dag?

c) Hur påverkas tillverkningen om det inte längre är möjligt att tillverka kvaliteten låg vid anläggning A (kapaciteten för hög och medel är oförändrad)?

INDATAFIL:

```
TITLE Aluminium;
DECISION
xA ! ( = antal dagar som tillverkning sker vid anläggning A )
xB ! ( = antal dagar som tillverkning sker vid anläggning B )
xC ! ( = antal dagar som tillverkning sker vid anläggning C )
xD ! ( = antal dagar som tillverkning sker vid anläggning D )

MIN
    Kostnad = 50000 xA + 60000 xB + 70000 xC + 55000 xD;

SUBJECT TO
    Hög:   6 xA +  2 xB + 3 xC + 4 xD > 12 ;
    Medel: 2 xA +  2 xB + 5 xC + 4 xD >  8 ;
    Låg:   4 xA + 10 xB + 6 xC + 4 xD >  5 ;

END
```

UTDATAFIL:

```
--------------------------------------------------------------------------------
SOLUTION RESULT - Optimal solution found
    MIN Kostnad  =     132500.0000

DECISION VARIABLES
    Variable Name            Activity     Reduced Cost
  ------------------------------------------------------
    xA                         1.0000           0.0000
    xB                         0.0000       32500.0000
    xC                         0.0000       12500.0000
    xD                         1.5000           0.0000
  ------------------------------------------------------

CONSTRAINTS
    Constraint Name              Slack     Shadow Price
  ------------------------------------------------------
    Hög                         0.0000       -5625.0000
    Medel                       0.0000       -8125.0000
    Låg                        -5.0000           0.0000
  ------------------------------------------------------

RANGES OBJECTIVE
    Variable Name         Coefficient      Lower Bound      Upper Bound
  -----------------------------------------------------------------------
```

```
    xA                     50000.0000      27500.0000        82500.0000
    xB                     60000.0000      27500.0000          1E+020
    xC                     70000.0000      57500.0000          1E+020
    xD                     55000.0000      33333.3333        63333.3333
  ----------------------------------------------------------------------

RANGES RHS
    Constraint Name          RHS Value      Lower Bound      Upper Bound
  ----------------------------------------------------------------------
    Hög                      12.0000         8.0000          24.0000
    Medel                     8.0000         4.0000          12.0000
    Låg                       5.0000        -1E+020          10.0000
  ----------------------------------------------------------------------
END
```