TNG019
Optimeringslära

Datum:	10 januari 2006
Tid:	8–12
Hjälpmedel:	Boken "Optimeringslära" av Lundgren et al. *eller* boken "Linjär och ickelinjär optimering". Litteraturen får innehålla små noteringar.
Antal uppgifter:	**Del A: 7 uppgifter, Del B: 3 uppgifter.** Uppgifterna under del A bedöms som antingen rätt eller fel. Minst 4 rätt krävs för godkänt på tentan. Uppgifterna under del B bedöms med 0–3 poäng. Denna poängsumma är underlag för eventuellt överbetyg.
Poängkrav:	
Examinator:	Peter Värbrand
Jourhavande lärare:	Clas Rydergren, tel: 0709 743898
Resultat anslås senast:	24 januari 2006 Kortfattade lösningsförslag anslås vid skrivningstidens slut.

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Del A:

Uppgift 1

Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrcrcr} \max z = & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{då} & 2x_1 & - & x_2 & \geq & 6 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 12 \\ & 2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 \\ & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Punkten $\bar{x} = (3\ 0)^T$ motsvaras av en tillåten baslösning. Hur många *närliggande tillåtna baslösningar* finns till punkten $\bar{x} = (3\ 0)^T$?

Uppgift 2

Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrcrcrl} \max z = & 3x_1 & + & 2x_2 & & & \\ \text{då} & 2x_1 & - & x_2 & \geq & 6 & \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 12 & (2) \\ & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0. & \end{array}$$

Skuggpriset till villkor (2) är 1 i punkten $\bar{x} = (4\ 0)^T$. Avgör giltighetsintervallet för detta skuggpris.

Uppgift 3

Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrcrcr} \max z = & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{då} & 2x_1 & - & x_2 & \geq & 6 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 12 \\ & 2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 \\ & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

För att lösa problemet med Simplex-metoden behöver ett så kallat Fas 1-problem lösas. *Formulera* detta Fas 1-problem.

Uppgift 4

Formulera KKT-villkoren (optimalitetsvillkoren) för problemet:

$$\begin{array}{rcccccl} \min z = & x_1^2 & + & 2x_2^2 & - & 8x_1 & -8x_2 \\ \text{då} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 7 & \\ & 0 & \leq & x_1 & \leq & 3 & \\ & 0 & \leq & x_2 & \leq & 3 & \\ & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

och visa att punkten $\bar{x} = (3\ 2)^T$ är globalt optimum till problemet.

Uppgift 5

Betrakta problemet

$$\min f(x) = x_1 x_2 + \frac{x_1^4}{6} + \frac{x_2^2}{2} - 2x_1.$$

Angör om riktningen $d = (0\ 1)^T$ är en descentriktning i punkten $\bar{x} = (\frac{1}{2}\ 1)^T$.

Uppgift 6

Avgör om problemet

$$\min_{x \in R^2} f(x) = 2x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + 2x_2 + e^{x_1+1}$$

är ett konvext optimeringsproblem.

Uppgift 7

$$\begin{array}{rcccccl} \max z = & kx_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{då} & 4x_1 & - & x_2 & \geq & 6 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 12 \\ & 2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 10 \\ & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Ange för vilka värden på k som punkten $\bar{x} = (\frac{5}{2}\ 1)^T$ är optimal.

Del B: Uppgift 1

Problemet

$$\begin{array}{llcrcrcrcr} \min z = & 4x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & \\ \text{då} & 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq & 6 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 12 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Ange de basvariabler som ingår i en baslösning som beskriver punkten $x = (3\ 0\ 0)^T$.

b) Antag att vi med Simplexmetoden befinner oss i baslösningen som beskriver punkten $x = (3\ 0\ 0)^T$. Då kommer metoden ta steget till punkten $x = (2\ 2\ 0)^T$. Ange den fem-dimensionella sökriktning som detta steg innebär.

c) Ange den reducerade kostnaden för den sökriktning som beräknades i b), d.v.s., den förändring vi får i målfunktionsvärde om ett steg av längd 1 tas i riktningen.

Uppgift 2

Under en dag skall 5000 fungerande enheter av en specifik sort tillverkas. Det finns fyra maskiner tillgängliga för att tillverka produkten, men produktionshastighet, produktionskostnad, och andel defekta produkter varierar mellan maskinerna. Data ges i tabellen nedan. Defekta produkter bidrar inte till att tillgodose efterfrågan.

Maskin	Produktions-kostnad (kr/enhet)	Kapacitet (enheter)	Andel defekta produkter (%)
1	4	2000	10
2	6	4000	5
3	2	1000	15
4	5	3000	8

Utöver denna kapacitet finns möjlighet att nyttja övertid vid maskin 2 och på så sätt öka dess kapacitet med ytterligare 1500 enheter. Övertiden gör dock att produktionskostnaden då ökar till 4.5kr/enhet.

a) Formulera en LP-modell för problemet att finna en produktionsplan som (förväntas) uppfylla efterfrågan till lägsta kostnad. *Lös ej.*

b) Andelen defekta produkter från en maskin är naturligtvis inte känd med säkerhet, utan är bara ett medelvärde. Om den verkliga felprocenten överstiger den förväntade kan följden bli att efterfrågan inte kan tillgogases, med förlorade kontrakt, stämningar etc. som följd. Vi är alltså intresserade av att finna en produktionsplan som, så långt det är möjligt lyckas tillgodose efterfrågan, dock fortfarande till en minimal kostnad. Forts nästa sida!...

Ge förslag på två olika modifieringar av modellen i deluppgift a) som gör att efterfrågan uppfylls med större säkerhet (utan att kostnaden därför ökar astronomiskt).

Uppgift 3

Ett oljeraffinaderi tänker sig att blanda till två typer av olja (kallade premium och regular) från tre råoljor (kallade butan, nafta och reformat). Tillgången till de tre råoljorna är begränsad till 12, 15 respektive 25 ton. Butan kostar 1500kr per ton, nafta 2400kr per ton och reformat 3000kr per ton. Raffinaderiet ska blanda till 10 ton av regular- och 25 ton av premiumoljan. Vid tillblandningen finns krav som måste uppfyllas för att oljorna ska få rätt kvalitet. Regularoljan måste få ett oktantal som är minst 90, och premiumoljan måste få ett oktantal som är minst 95. Oktantalet bestäms utifrån råoljornas oktantal. Dess oktantal är 120, 75, respektive 80. Raffinaderiet har kommit fram till följande modell:

```
var x{1..3}>=0; # ton butan, nafta respektive reformat som blandas i regular
var y{1..3}>=0; # ton butan, nafta respektive reformat som blandas i premium
minimize z: 1500*(x[1]+y[1])+2400*(x[2]+y[2])+3000*(x[3]+y[3]);
subject to tillg_butan: x[1]+y[1]<=12;
subject to tillg_nafta: x[2]+y[2]<=15;
subject to tillg_reformat: x[3]+y[3]<=25;
subject to efterf_regular: x[1]+x[2]+x[3]=10;
subject to efterf_premium: y[1]+y[2]+y[3]=25;
subject to oktan_regular: 120*x[1]+75*x[2]+80*x[3]>=90*10;
subject to oktan_premium: 120*y[1]+75*y[2]+80*y[3]>=95*25;
```

vilken de löser med programmen AMPL/CPLEX. De erhåller bl.a. följande utdata på nästa sida:

```
x [*] :=
1  2.5
2  0
3  7.5
;
y [*] :=
1   9.5
2   1
3  14.5
;
:    x.down x.current   x.up        x.rc        :=
1     1500    1500     1e+20    0
2     2400    2400     1e+20    0
3    -1e+20   3000      3000    0
;
:    _con.down _con.current    _con.up   _con.slack _con.dual    :=
1     11.875          12          13.6111        0       -6300
2      1              15      1e+20             14           0
3     22              25      1e+20              3           0
4      9.9375         10          10.8056        0       -6600
5     24.9375         25          25.875         0       -6600
6    835.556         900         905             0         120
7   2305            2375        2380             0         120
;
```

Använd känslighetsanalys för att besvara följande frågor

a) Antag att raffinaderiet får tillgång till ett ton mer av råoljan butan. Hur påverkar det den totala kostnaden?

b) Enligt optimallösningen används ingen nafta till oljan regular. Hur mycket måste priset på nafta minska för att nafta ska vara lönsam att använda i regular?

c) Raffinaderiet vill analysera hur en ökning av kvaliteten på premium från 95 till 98 oktan skulle påverka kostnaden. Ge minsta möjliga intervall på hur stor den totala kostnaden blir givet denna kvalitetsökning.