Linköpings tekniska högskola
ITN/Campus Norrköping

TENTAMEN

TNG 019 Optimeringslära

Datum:	2004-04-19
Tid:	08 - 12
Hjälpmedel:	Kursböckerna: Optimeringslära, Studentlitteratur 2003, eller Linjär och ickelinjär optimering, Studentlitteratur 2001. (Böckerna får innehålla egna kommentarer.)
Antal uppgifter:	Del A: 7 uppgifter; Del B: 3 uppgifter Uppgifterna under del A bedöms som antingen rätt eller fel. Minst 5 rätt krävs för godkänt på tentan. Uppgifterna under del B bedöms med 0-3 poäng. Denna poängsumma är underlag för eventuellt överbetyg.
Examinator:	Peter Värbrand
Jourhavande lärare:	Henrik Andersson, Tel 011-363079

Tentamensinstruktioner
När Du löser räkneuppgifter
Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Vid skrivningstidens slut
Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Lycka till!

Del A:

1. Tag fram ett värde på c_1 respektive c_2 så att (P1) har en optimal lösning i $x^* = (2, -2)$ samt bestäm, med valfri metod, skuggpriset till bivillkor (*) för dessa värden.

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
(P1) & \min z = & -c_1x_1 & + & c_2x_2 & & & \\
 & \text{då} & x_1 & + & x_2 & \leq & 0 & \quad (*) \\
 & & x_1 & - & x_2 & \leq & 4 & \\
 & & x_1 & & & \geq & 0 & \\
 & & & & x_2 & \leq & 0 &
\end{array}
$$

2. Skriv problemet (P1) i uppgift 1 ovan på standardform.

3. Är problemet (P2) nedan konvext?

$$
\begin{array}{lrrcrcr}
(P2) & \max f(x_1, x_2) = & \multicolumn{5}{l}{2x_1 - x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2} \\
 & \text{då} & 2x_1^2 & - & x_2 & \leq & 10 \\
 & & x_1 & - & x_2^2 & \geq & 1
\end{array}
$$

4. Ange samtliga tillåtna och förbättrande sökriktningar till problemet (P2) i punkten $(x_1, x_2) = (2, 0)$.

5. Givet ett LP-problem på standardform där x_1 och x_2 är ursprungliga variabler och s_1, s_2 och s_3 är slackvariabler i respektive bivillkor (1), (2) och (3) i figuren nedan. Vilka variabler är basvariabler i punkten A?

6. Beskriv det basbyte (inkommande och utgående variabel) som sker då man förflyttar sig från punkten A till punkten B i figuren till föregående uppgift?

7. Följande problem

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcl}
\min z = & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & 6x_5 & & \\
\text{då} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & \geq & 3 \\
& x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 4 \\
& -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & \geq & 3 \\
\end{array}
$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

ger upphov till utdata enligt följande

```
OBJECTIVE FUNCTION
:    _objname      _obj    :=
1   'Målfunktion'   3

DECISION VARIABLES
: _varname _var     _var.rc       :=
1   x1       0     0.285714
2   x2       1     0
3   x3       0     0.214286
4   x4       2     0
5   x5       1     0

RANGES OBJECTIVE
: _varname     _var.down   _var.current     _var.up      :=
1   x1          0.714286          1       1e+20
2   x2          0                 1           1.4
3   x3          2.78571           3       1e+20
4   x4        -24                -2          -1.6
5   x5          1.6               6           6.31579

CONSTRAINTS
:    _conname     _con.slack    _con.dual    :=
1   Bivillkor1    0              1.07143
2   Bivillkor2    0             -0.642857
3   Bivillkor3    0              0.785714

RANGES RHS
:    _conname   _con.down _con.current     _con.up      :=
1   Bivillkor1   -6.33333       3           14.2
2   Bivillkor2    1.2           4        1e+20
3   Bivillkor3   -2.6           3            7.66667
```

Ange optimala målfunktionsvärdet och de optimala variabelvärdena om målfunktionskoefficienten framför x_4 förändras till -3.

Del B:

1. Givet problemet

$$
\begin{array}{rrcrcrcr}
\min f(x_1, x_2) = & x_1^2 + x_2^2 + 8x_1 - 8x_2 & & & & & & \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & & & \geq & 0
\end{array}
$$

   Utför **en** iteration med Frank-Wolfe metoden. Starta i punkten $(x_1, x_2) = (2, 2)$. Ange om möjligt ett giltigt intervall inom vilket det optimala målfunktionvärdet garanterat ligger.

2. Formulera dualen till nedanstående LP-problem

$$
\begin{array}{ll}
\max & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad \leq \quad 1 \qquad i = 1, \ldots, m \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad \geq \quad 1 \qquad j = 1, \ldots, n \\
 & x_{ij} \geq 0 \qquad\qquad\quad i = 1, \ldots, m \; ; \; j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

3. En ambulerande cirkus har kommit till Norrköping och behöver hjälp med att hyra in extra personal till de två föreställningar som ska genomföras kommande helg. Totalt är det fem olika tjänster som behövs, tre stycken arbetare som hjälper till bakom scenen och två cirkusartister som framför var sitt nummer under föreställningarna. Cirkusdirektören har satt ihop en lista med de kandidater som sökt tjänsterna.

Namn	Typ av arbete	Uppträdande	Lön per föreställning (i euro)
Anna	Bakom scenen		47
Bertil	Bakom scenen		45
Carl	Artist	Eldslukare	86
Diana	Artist	Clown	90
Edward	Bakom scenen		47
Frida	Artist	Hästshow	100
Gunnar	Artist	Hundar på scenen	70
Hillevi	Bakom scenen		46
Inez	Artist	Lindansare	94
Jesper	Bakom scenen		44

   På grund av olika anledningar finns det ett antal krav som måste vara uppfyllda:

   - Om Frida från Nyköping anlitas måste minst två av Anna, Edward och Jesper också anlitas för att hjälpa henne med hästarna.
   - Cirkusdirektören vill maximalt ha tre cirkusnummer som involverar djur. Två ordinarie nummer, lejontämjaren och pantomimartisten med katten, involverar djur och kan inte tas bort ur programmet.
   - Alla personer som arbetar bakom scenen anställs för båda föreställningarna.
   - Inez kan endast tänka sig att uppträda under en av föreställningarna, de andra artisterna kan anlitas för en eller två föreställningar.

- Om Carl anlitas för båda föreställningarna kräver han 12 euro extra på grund av ett specialtillstånd som då krävs från Brandmyndigheten.

Hjälp cirkusdirektören att välja vilka scenarbetare samt artister som ska anlitas för att lönekostnaden ska bli så låg som möjligt. Formulera problemet som ett linjärt heltalsproblem.

Kortfattade lösningar till TNG 019 Optimeringslära 2004-04-19

1. Negativa gradienten till målfunktionen måste ligga i den kon som spänns upp av de aktiva bivillkoren i den aktuella punkten. Detta betyder att alla tillåtna värden på c_1 och c_2 uppfyller
$$|c_2| \leq c_1 \ , \ c_1 \geq 0$$
Skuggpriset för bivillkor (*) kan skrivas
$$y_1 = (c_2 - c_1)/2$$
För $c_1 = c_2 = 1$ ger alltså detta skuggpriset 0.

2. För att ett problem ska vara skrivet på standardform måste
   - Alla bivillkor vara likhetsvillkor
   - Alla variabler vara icke-negativa

   Med variabelsubstitutionen $y_2 = -x_2$ och tillägg av slackvariabler fås
$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \min z = & -c_1x_1 & - & c_2y_2 & & & & & & \\ \text{då} & x_1 & - & y_2 & + & s_1 & & & = & 0 \\ & x_1 & + & y_2 & & & + & s_2 & = & 4 \\ & & & \multicolumn{4}{l}{x_1, y_2, s_1, s_2 \geq 0} & & & \end{array}$$

3. Ett maximeringsproblem är konvext om
   - Målfunktionen är konkav
   - Det tillåtna området utgörs av en konvex mängd

   Börja med att undersöka målfunktionen genom att beräkna dess Hessian
$$H = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = -2 \ , \ h_2 = (-2 \cdot (-4)) - (-1 \cdot (-1)) = 7$$
Eftersom $h_1 < 0$ och $h_2 > 0$ så är H negativt definit och f är därmed (strikt) konkav.

   Från första bivillkoret fås $g_1(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_2$ vilket är en summa av konvexa funktioner. $g_1(x_1, x_2) \leq 10$ beskriver därmed en konvex mängd. Då andra bivillkoret är på $\geq$-form skriver vi om det till $-x_1 + x_2^2 \leq -1$. Även $g_2(x_1, x_2) = -x_1 + x_2^2$ är en summa av konvexa funktioner och villkoret $x_1 - x_2^2 \geq 1$ beskriver en konvex mängd. Snittet av konvexa mängder är en konvex mängd varför det tillåtna området utgörs av en konvex mängd.

   $\Rightarrow$ Problemet är konvext.

4. En sökriktning d är tillåten om $x + \bar{t}d \in X \ \forall \ \bar{t}, 0 < t < \bar{t}$. Eftersom punkten $(x_1, x_2) = (2, 0)$ är en inre punkt betyder detta att alla riktningar d är tillåtna.

   En sökriktning d är förbättrande i ett maximeringsproblem om riktningen är en ascentriktning. För en ascentriktning gäller $\nabla f(2, 0)^T d > 0$.

   $\nabla f(x_1, x_2) = (2 - 2x_1 - x_2, -x_1 - 4x_2) \Rightarrow \nabla f(2, 0) = (-2, -2)$. Alltså är alla riktningar $d = (d_1, d_2)$ sådana att $-2d_1 - 2d_2 > 0$ tillåtna och förbättrande sökriktningar.

5. Eftersom varken x_1- eller x_2-axeln är aktiva i punkten A kan vi säga att x_1 och x_2 är basvariabler. Vidare är inte heller bivillkor (2) bindande varför även s_2 är basvariabel. Detta ger basen (x_1, x_2, s_2).

6. Det bivillkor som blir aktivt av förflyttningen är bivillkor (2) varför s_2 blir utgående variabel, medan s_1 blir inkommande variabel eftersom bivillkor (1) inte längre är bindande. Basbytet blir alltså $(x_1, x_2, s_2) \to (x_1, x_2, s_1)$.

7. En förändring av en målfunktionskoefficient påverkar inte de optimala variabelvärdena om den är inom intervallet, däremot kommer det optimala målfunktionsvärdet att förändras. Förändringen $c_3 = -2 \to c_3 = -3$ ligger inom intervallet $-24 \le c_3 \le -1,6$ varför de optimala variabelvärdena inte förändras. Det nya optimala målfunktionsvärdet blir $z = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 1$.

$$x^* = (0, 1, 0, 2, 1) \qquad z^* = 1$$

8. Följ algoritmbeskrivningen i boken.

   0 Vi har en tillåten startlösning $x^{(0)} = (2, 2)$. $k = 0$, $LBD = -\infty$, $UBD = f(2, 2) = 8$.

   1 $z(x_1, x_2) = 8 + \nabla f(2, 2)^T (x_1 - 2, x_2 - 2) = 12x_1 - 4x_2 - 8$. Lösningen till LP-problemet med denna målfunktion blir $x^* = y^{(0)} = (0, 2), z^* = -16$. Uppdatera LBD. LBD = -16.

   2 $d^{(0)} = y^{(0)} - x^{(0)} = (-2, 0)$ vilket ger $x^{(1)}(t) = x^{(0)} + td^{(0)} = (2 - 2t, 2)$

   3 Sätt in $x^{(1)}(t)$ i $f(x^{(1)}(t))$. Detta ger $f(x^{(1)}(t)) = 4t^2 - 24t + 8$. $f'(x^{(1)}(t)) = 0 \Rightarrow 8t - 24 = 0 \Rightarrow t = 3$. Eftersom $t > 1$ sätter vi $t = 1$.

   4 $x^{(1)}(t) = /t = 1/ = (0, 2)$. $f(0, 2) = -12 \Rightarrow UBD = -12$.

   5 $k = 1$

   Intervallet blir $-16 \le f(x_1, x_2) \le -12$.

9. Med dualvariablerna y och w för första respektive andra bivillkoret fås följande duala problem

$$\begin{array}{llll} \min & \sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} w_j & & \\ \text{då} & y_i + w_j \ \ge \ c_{ij} & & i = 1, \ldots, m \ ; \ j = 1, \ldots, n \\ & y_i \ \ge \ 0 & & i = 1, \ldots, m \\ & w_j \ \le \ 0 & & j = 1, \ldots, n \end{array}$$

10. Ett exempel på modell är följande

    Variabeldeklaration:

    x_{ij} = 1 om person i anställs under föreställning j och 0 annars, $i = A, \ldots, J$, $j = 1, 2$.

    y_C = 1 om Carl anställs under båda föreställningarna och 0 annars

    c_i = Lön per föreställning för person i, OBS en parameter

$$\min \sum_{i=A}^{J} \sum_{j=1}^{2} c_i x_{ij} + 12 y_C$$

$$\begin{array}{rcll} x_{Aj} + x_{Bj} + x_{Ej} + x_{Hj} + x_{Jj} & = & 3 & j = 1, 2 \\ x_{Cj} + x_{Dj} + x_{Fj} + x_{Gj} + x_{Ij} & = & 2 & j = 1, 2 \\ x_{Aj} + x_{Ej} + x_{Jj} & \ge & 2x_{Fj} & j = 1, 2 \\ x_{Fj} + x_{Gj} & \le & 1 & j = 1, 2 \\ x_{j1} & = & x_{j2} & j = A, B, E, H, J \\ x_{I1} + x_{I2} & \le & 1 & \\ x_{C1} + x_{C2} & \le & y_C + 1 & \\ x_{ij} \in 0/1 \ , \ y_C \in 0/1 & & & i = A, \ldots, J \ , \ j = 1, 2 \end{array}$$